建筑结构基于 Clough-Penzien 谱的随机地震动响应的简明解析解法

王善库[1],葛新广[2],赵立菊[1]

(1.信阳职业技术学院建筑工程学院,464000 信阳;2.广西科技大学土木建筑学院,545002 柳州)

摘　要:针对建筑结构基于 Clough-Penzien(C-P)谱下的结构随机地震动响应既有方法复杂的现状,提出了一种简明解析法。C-P 谱是将场地的地震动看作基于白噪声激励的两个关联的滤波方程,较准确地模拟场地的平稳地震动特征。首先,提出将 C-P 谱滤波方程组与建筑结构的运动方程联立,实现了不易求解的非白噪声激励精确转化为简明的白噪声激励的效果;其次,基于复模态正交法对重构后的结构运动方程组进行解耦,并基于随机振动理论推导出结构响应的功率谱密度函数和 0 阶、1 阶和 2 阶谱矩的简明解析式;最后,分析了基于首次超越破坏准和最弱失效模式下的结构体系动力可靠度。算例验证了所提方法的准确性和简洁性;此外,所提方法也可推广至其他复杂平稳非白噪声激励的地震动响应分析。

关键词: Clough-Penzien(C-P)谱;谱矩;体系动力可靠度;简明解析解;复模态法

中图分类号:TU318　　　　**文献标志码:**A

Concise analytical solutions for random response of building subjected to Clough-Penzien seismic excitation

WANG Shanku[1],GE Xinguang[2],ZHAO Liju[1]

(1. College of Architectural Engineering,Xinyang Vocational and Technical College,464000 Xinyang,China;
2. School of Civil Engineering & Architecture,Guangxi University of Science and Technology,545002 Liuzhou,China)

Abstract: Aiming at the inefficiency of structural response and dynamic reliability analysis under Clough-Penzien (C-P) random earthquake excitation,a simple and fast method for solving the seismic response equation of building structure by using C-P filtering equations and seismic response equation of building structure is proposed. C-P spectrum regards the ground motion of site as two filtering differential equations,which can accurately simulate the stationary ground motion characteristics of site. First,the complex ground motion excitation is transformed into the ground motion excitation based on white noise by combining filtering equations of C-P spectrum with structural dynamic equations. Second,the complex mode method is used to decouple the ground motion equations,and the concise analytical expressions of covariance,power spectral density function and 0-2 order spectral moments of structural response are obtained

收稿日期:2020-11-16　　　　**修回日期:**2021-12-10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No.51468005)
通信作者:王善库,副教授,研究方向为建筑结构振动控制研究。E-mail: 20866227@qq.com
引用格式:王善库,葛新广,赵立菊.建筑结构基于 Clough-Penzien 谱的随机地震动响应的简明解析解法[J].应用力学学报,2022,39(1):96-103.
WANG Shanku,GE Xinguang,ZHAO Liju,et al. Concise analytical solutions for random response of building subjected to Clough-Penzien seismic excitation[J]. Chinese journal of applied mechanics,2022,39(1):96-103.

based on the random vibration theory. Last, the system dynamic reliability calculation of the structure based on the first passage failure criterion is analyzed. An example shows the accuracy and simplicity of the proposed method. In addition, this method can also be applied to the analysis of ground motion response subjected to other complex stationary non-white noise rand excitation.

Key words: Clough-Penzien (C-P) spectrum; spectral moment; system dynamic reliability; concise analytical solution; complex mode method

地震时常发生,每次强震都会导致震区一定范围的各种人造结构诸如房屋建筑、交通设施、水利设施等的损毁并造成不同程度的人员伤亡。因此,对于地震动的研究由来已久,自 20 世纪 40 年代开始,随着地震动观测设备的改进及观测数据的增加,发现地震具有显著的随机性,各种随机地震动模型被提出。文献[1]首先提出白噪声激励模型,该模型认为功率谱在全频率范围内保持不变,这与真实的地震过程存在偏差,但开启了随机模型描述地震动的先河。文献[2-3]根据大量的地震动时程记录,提出了过滤白噪声模型,即著名的 Kanai-Tajimi 随机谱,该模型认为场地土下覆盖的基岩的地震动过程为白噪声过程,而覆盖土层的运动看作一考虑场地土特征的单自由度过滤器,能解决白噪声激励模型功率谱变化的问题,但存在过分夸大低频地震动能量的缺点。随着地震动记录的不断增加,各国学者均提出了新的地震动模型,如美国学者 Clough 和 Penzien 提出的 Clough-Penzien 谱[4]、中国学者胡聿贤等提出的胡聿贤谱[5]、欧进萍等提出的欧进萍谱[6]等。其中,Clough-Penzien(C-P)谱利用 2 个滤波器来描述场地土对地面运动的影响,可改善 Kanai-Tajimi 谱不足,在工程上有着广泛的应用[7-9]。

随机地震动下建筑结构的响应分析法主要有时域法和频域法[10-11]。频域法应用时,结构响应功率谱表示为地震激励功率谱与结构的频响函数模值平方的代数积,无需解微分方程,而受到广泛的应用。最具有代表性的实用方法为虚拟激励法[10]和传递函数法[11-12],其中,林家浩提出的虚拟激励法已广泛应用于各种结构的振动分析研究[13-16]。李春祥等[17]利用传递函数法研究了基于修正 C-P 谱的 MTMD 结构的动力特征。李创第等[18]利用传递函数法研究了基于巴斯金谱的设置支撑的广义 Maxwell 阻尼器系统的地震响应分析。然而工程中需要计算结构随机响应的方差和谱矩等参数,以上研究的参数频域法都需要在频域内进行数值积分,对于大型复杂结构的随机响应分析,计算效率比较低,计算精度受数值积分参数取值的影响。

时域法,以激励的协方差为基础,以结构的结构响应方差为研究对象,实模态和复模态是其两种主要方法[7,10,19]。实模态方法仅能解决经典结构的振动问题,而复模态方法是一种解决定常高阶微分方程的数学方法,因而可广泛应用于各类线性结构的振动问题[7,20-21]。文献[7]研究了 Clough-Penzien 谱下隔振结构的随机响应,所获得的响应表达式比较复杂,且仅给出了结构的方差,没有给出 1 阶谱矩的分析。

基于首次超越破坏准则结构地震动可靠度分析是结构安全评估的重要手段[22-25],目前工程上采用以结构层间变形的失效模式为弹性结构的失效模式,采用层间弹性位移角作为指标[9,26]。对于多自由度体系的动力可靠度分析,首要前提是确定其失效模式,欧进萍等[27]提出了"最弱失效模式",得到了广泛地应用[28-29]。刘强等[23]利用虚拟激励法研究了滞变结构体系基于 Poisson 分布的动力可靠度,该研究所得的位移方差和速度方差均为数值解,其分析效率及精度受数值积分间隔影响较大。

本文将 Clough-Penzien 谱的 2 个滤波方程与结构的运动方程联立,将复杂的地震动激励准确地转化成简明的白噪声激励;基于复模态正交法和随机振动理论,推导结构随机地震动响应的协方差、谱矩等响应量的简明解析式;最后,基于首次超越破坏准则和"最弱失效模式"分析结构的体系动力可靠度。

1 结构地震动方程基于 C-P 谱的白噪声转换

一 n 层建筑结构,其质量、阻尼、刚度矩阵分别为 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K}$,地震动下的运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{x}+\boldsymbol{C}\dot{x}+\boldsymbol{K}x=-\boldsymbol{MI}\ddot{x}_g \tag{1}$$

式中:$\ddot{x}$、$\dot{x}$、x 分别为建筑结构相对于地面的加速度、速度和位移;$\boldsymbol{I}=[1\ \cdots\ 1]^{\mathrm{T}}$,上标"T"表示向量转置运算;$\ddot{x}_g$ 为场地地面运动的绝对加速度,本研究

采用 C-P 谱的随机地震动模型，该模型的滤波方程为[4]

$$\ddot{x}_g + 2\xi_f\omega_f\dot{x}_g + \omega_f^2 x_g = -\ddot{x}_f \tag{2a}$$

$$\ddot{x}_f = \ddot{u}_g + \ddot{u}_R \tag{2b}$$

$$\ddot{u}_g + 2\xi_g\omega_g\dot{u}_g + \omega_g^2 u_g = -\ddot{u}_R \tag{2c}$$

式中：ω_g、ξ_g 分别为基岩覆盖层上场地土的阻尼比和卓越频率；ω_f、ξ_f 分别为地面处场地土的阻尼比和卓越频率；$\ddot{u}_R$ 为场地处基岩地震动加速度，为白噪声随机过程，其协方差函数为

$$C_{\ddot{u}_R}(\tau) = 2\pi S_0\delta(\tau) \tag{3}$$

式中：S_0 为基岩地震动强度常数；$\delta(\tau)$ 为 Dirac 函数。

工程上常采用 C-P 谱的功率谱密度函数[9-10]，即

$$S_{\ddot{x}_g}(\omega) = \frac{\omega^4}{(\omega_f^2-\omega^2)^2+4\xi_f^2\omega_f^2\omega^2}\frac{\omega_g^4+4\xi_g^2\omega_g^2\omega^2}{(\omega_g^2-\omega^2)^2+4\xi_g^2\omega_g^2\omega^2}S_0 \tag{4}$$

由式(4)可知，$\ddot{x}_g$ 的功率谱密度函数表达式极其复杂，在工程应用时无法获得简明的解析解。为此，本文提出了基于 C-P 谱激励模型下结构的地震动分析可采用其过滤器方程与建筑结构的地震动运动方程联合建立分析的方法。

联立式(1)及式(2)，则建筑结构的运动方程的矩阵形式为

$$\bar{\boldsymbol{M}}\ddot{\boldsymbol{X}} + \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{X}} + \bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{\alpha}\ddot{u}_R \tag{5}$$

$$\boldsymbol{X} = [u_g \quad x_g \quad x]^{\mathrm{T}} \tag{6a}$$

$$\bar{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{MI} & \boldsymbol{M} \end{bmatrix}_{n+2,n+2},$$

$$\bar{\boldsymbol{K}} = \begin{bmatrix} \omega_g^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_f^2 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{K} \end{bmatrix}_{n+2,n+2} \tag{6b}$$

$$\bar{\boldsymbol{C}} = \begin{bmatrix} 2\xi_g\omega_g & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_f\omega_f & \\ & & C \end{bmatrix}_{n+2,n+2}, \boldsymbol{\alpha} = -\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{n+2,1} \tag{6c}$$

由式(5)可知，建筑结构基于 C-P 谱的地震动转化为白噪声激励的结构地震动，为本文所获得 C-P 谱下地震动响应的简明解奠定基础。

2 建筑结构地震动响应的统一解

引入状态变量

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{X} \quad \dot{\boldsymbol{X}}]^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

式(5)改写为

$$\tilde{\boldsymbol{M}}\dot{\boldsymbol{y}} + \tilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}\ddot{u}_R(t) \tag{8}$$

式中

$$\tilde{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{M}} & 0 \\ 0 & \bar{\boldsymbol{M}} \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{K}} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\boldsymbol{M}} \\ \bar{\boldsymbol{K}} & \bar{\boldsymbol{C}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{r} = -\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}$$

依据复模态理论[7,10]，方程式(8)存在使其解耦对角阵 $\boldsymbol{P}$ 及左、右特性向量 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$，即

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{U}} \tag{9}$$

引入复模态变量[7,10]

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{z} \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{z}$ 为广义复模态变量。

利用式(10)并结合复模态正交法的特性，式(8)简写为

$$\dot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\eta}\ddot{u}_R \tag{11}$$

式中

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{U}}$$

由于 $\boldsymbol{P}$ 为对角阵，可获得式(11)的分量式

$$\dot{z}_i + p_i z_i = \eta_i\ddot{u}_R \tag{12}$$

式中 z_i、η_i、p_i 分别为向量 $\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{\eta}$，$\boldsymbol{p}$ 的分量。

联立式(6a)、式(7)、式(10)及式(12)，结构层的位移 x_j 和速度 $\dot{x}_j$，层间位移 Δx_j 及层间位移变化率 $\Delta\dot{x}_j$，可表示为

$$x_j = u_{j+2}z = \sum_{i=1}^{2(n+2)}\lambda_{j+2,i}\int_0^t \mathrm{e}^{-p_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{13a}$$

$$\dot{x}_j = u_{j+n+4}z = \sum_{i=1}^{2(n+2)}\lambda_{j+n+4,i}\int_0^t \mathrm{e}^{-p_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{13b}$$

$$\Delta x_j = \sum_{i=1}^{2(n+2)}\bar{\lambda}_{j+2,i}\int_0^t \mathrm{e}^{-p_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)\mathrm{d}\tau, j>1 \tag{13c}$$

$$\Delta\dot{x}_j = \sum_{i=1}^{2(n+2)}\bar{\lambda}_{j+2,i}\int_0^t \mathrm{e}^{-p_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)\mathrm{d}\tau, j>1 \tag{13d}$$

$$\Delta x_1 = x_1, \Delta\dot{x}_1 = \dot{x}_1 \tag{13e}$$

结构响应的强度系数为

$$\lambda_{j,i} = u_{j,i}\eta_i \tag{14}$$

式中 $\bar{\lambda}_{j+2,i} = (u_{j+2} - u_{j+1})\eta_i$。

结构的各类响应可统一表示为

$$X(t) = \sum_{i=1}^{2(n+2)} \chi_i \int_0^t \mathrm{e}^{-p_i\tau}\, \ddot{u}_R(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sum_{i=1}^{2(n+2)} X_i(t) \tag{15}$$

式中 χ_i 为结构响应的强度系数。

结构的响应分量为

$$X_i(t) = \chi_i \int_0^t \mathrm{e}^{-p_i\tau}\, \ddot{u}_R(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{16}$$

3 随机响应功率谱和谱矩分析

3.1 随机响应的协方差分析

依据随机振动理论，并通过式(15)，结构响应 X_l 的协方差表示为[7,10]

$$C_X(\tau) = \sum_{k=1}^{2(n+2)} \sum_{i=1}^{2(n+2)} E[X_k(t)X_i(t+\tau)] \tag{17}$$

由式(16)，随机响应分量的协方差表示为

$$E[X_k(t)\chi_i(t+\tau)]$$
$$= \chi_k\chi_i \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-p_k u}\mathrm{e}^{-p_i v} E[\ddot{u}_R(t-u)\,\ddot{u}_R(t+\tau-v)]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \chi_k\chi_i \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-p_k u}\mathrm{e}^{-p_i v} C_{\ddot{u}_R}(u+\tau-v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{18}$$

把式(3)代入式(18)，即

$$E[X_k(t)X_i(t+\tau)]$$
$$= 2\pi S_0 \chi_k\chi_i \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-p_k u}\mathrm{e}^{-p_i v} \delta(u+\tau-v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{19}$$

利用 Dirac 的函数性质，式(19)简化为

$$E[\chi_k(t)\chi_i(t+\tau)] = 2\pi S_0 \chi_k\chi_i \int_0^\infty \mathrm{e}^{-p_k u}\mathrm{e}^{-p_i(u+\tau)}\,\mathrm{d}u \tag{20}$$

对式(20)运用积分

$$E[X_k(t)X_i(t+\tau)] = 2\pi S_0 \chi_k\chi_i \frac{\mathrm{e}^{-p_i\tau}}{p_k+p_i} \tag{21}$$

由式(17)及式(21)，结构基于 C-P 谱的地震动响应的协方差为

$$C_X(\tau) = 2\pi S_0 \sum_{i=1}^{2(n+2)} G_{X_i}\mathrm{e}^{-p_i\tau} \tag{22}$$

$$G_{X_i} = \sum_{k=1}^{2(n+2)} \frac{\chi_k\chi_i}{p_k+p_i} \tag{23}$$

观察式(22)，建筑结构基于 C-P 谱的随机地震动响应的协方差表示为结构振动特征值指函数的线性组合，具有表达式简洁明了的特点。

依据随机振动理论，当 $\tau=0$ 时，结构随机地震动响应的协方差等于随机响应的方差，即

$$\sigma_X = \sqrt{C_X(0)} = \sqrt{2\pi S_0 \sum_{i=1}^{2(n+2)} G_{X_i}} \tag{24}$$

由式(15)及式(24)可获得结构地震动响应的位移、速度及层间位移及其变化率的方差。

3.2 结构随机响应的功率谱分析

由随机振动理论[7,10]，结构随机响应的功率谱密度函数与其协方差的关系为

$$S_X(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty C_X(\tau)\cos(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{25}$$

式中 $S_X(\omega)$ 为结构响应 X 的功率谱密度函数。

把式(22)代入式(25)，即

$$S_X(\omega) = 2S_0 \sum_{i=1}^{2(n+2)} G_i \int_0^\infty \mathrm{e}^{-p_i\tau}\cos(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{26}$$

式(26)进行积分并整理，即

$$S_X(\omega) = 2S_0 \sum_{i=1}^{2(n+2)} G_{X_i}\frac{p_i}{\omega^2+p_i^2} \tag{27}$$

观察式(27)，结构随机地震动响应的功率谱表示为结构复振动特征值与频域变量的平方和的倒数的线性组合，为结构随机地震动响应 0 阶、1 阶和 2 阶谱矩的简明解奠定了基础。

3.3 随机响应的 0～2 阶谱矩分析

依据平稳响应谱矩的定义[7,10]，谱矩 $\alpha_{X,l}$ 表示为

$$\alpha_{X,l} = 2\int_0^\infty S_X(\omega)\omega^l\,\mathrm{d}\omega \tag{28}$$

式中 $l=0,1,2$ 分别表示结构随机响应的 0 阶、1 阶和 2 阶谱矩。

把式(27)响应功率谱代入式(28)，并令 $l=0$，则

$$\alpha_{X,0} = 4S_0 \sum_{i=1}^{2(n+2)} G_{X_i}\int_0^\infty \frac{p_i}{\omega^2+p_i^2}\,\mathrm{d}\omega \tag{29}$$

对式(29)积分，则结构响应的 0 阶谱矩为

$$\alpha_{X,0} = 2\pi S_0 \sum_{i=1}^{2(n+2)} G_{X_i} \tag{30}$$

由平稳随机振动理论，结构地震动响应的 0 阶谱矩、2 阶谱矩与结构地震动响应方差的关系为

$$\alpha_{X,0} = \sigma_X^2 \tag{31a}$$

$$\alpha_{X,2} = \sigma_{\dot{X}}^2 \tag{31b}$$

式中 $\dot{X}$ 表示 X 对时间的一阶导数。

式(31a)表示建筑结构的随机地震动响应的方差与式(22)表示的方差表达式完全一致，验证了本文方法的正确性。

将式(27)表示的功率谱代入式(28)，并令 $l=1$

时，结构随机地震动响应的1阶谱矩为

$$\alpha_{X,1}=4S_0\sum_{i=1}^{2(n+2)}G_{X,i}p_i\int_0^{\infty}\frac{\omega}{\omega^2+p_i^2}\mathrm{d}\omega \tag{32}$$

对式(32)进行积分

$$\alpha_{X,1}=4S_0\sum_{i=1}^{2(n+2)}G_{X,i}p_i\ln(\omega^2+p_i^2)\Big|_0^{\infty}$$

$$=2S_0\lim_{\omega\to\infty}\ln\omega^2\sum_{i=1}^{2(n+2)}G_{X,i}p_i-2S_0\sum_{i=1}^{2(n+2)}G_{X,i}p_i\ln p_i^2 \tag{33}$$

由文献[10]及式(28)可知，2阶谱矩存在，则1阶谱矩肯定存在，即

$$\sum_{i=1}^{2(n+2)}G_{X,i}p_i=0 \tag{34}$$

由于实际频域变量为有限量，故下式成立。

$$2S_0\lim_{\omega\to\infty}\ln\omega^2\sum_{i=1}^{2(n+2)}G_{X,i}p_i=0 \tag{35}$$

则结构地震动响应的1阶谱矩 $\alpha_{X,1}$ 可表示为

$$\alpha_{X,1}=-2S_0\sum_{i=1}^{2(n+2)}G_{X,i}p_i\ln p_i^2 \tag{36}$$

由式(30)及式(36)可知，结构地震动响应的0～2谱矩均有解析解，且表达式简洁明了。

4 建筑结构体系动力可靠度

基于首次超越破坏准则的建筑结构动力可靠度[22-25]计算是线性结构可靠度计算的最重要方法。Vanmarcke[25]提出的动力可靠度灾变函数的理论公式，因具有较高的精度，得到了广泛应用。

$$h(\zeta_X)=\frac{\sigma_{\dot X}}{\pi\sigma_X}\exp\left(-\frac{\zeta_X^2}{2\sigma_X^2}\right)\frac{1-\exp\{-\sqrt{2\pi}(q_X)^{1.2}\zeta_X/\sigma_X\}}{1-\exp[-0.5(\zeta_X/\sigma_X)^2]} \tag{37}$$

式中 ζ_X 为响应量 X 的安全界限值；q_X 为谱参数，计算公式为

$$q_X=\sqrt{1-\frac{\alpha_{X,1}^2}{\alpha_{X,0}\alpha_{X,2}}} \tag{38}$$

则构件的动力可靠度表示为

$$P_{X,s}=\exp[-Th(\zeta_X)] \tag{39}$$

式中 T 为一次动荷载的持续时间。

对于多层建筑结构的体系可靠度，欧进萍等[27]提出了“最弱失效模型”理论，其以层间变形为指标的动力可靠度分析可看作串联形式的结构失效模式，则建筑结构体系的动力失效概率 P_f 为

$$P_f=1-\prod_{i=1}^{n}P_{X_i,s} \tag{40}$$

5 算例应用

一6层框架结构，结构层的力学参数：1层、2层的质量均为520 t，3层～6层质量为450 t；1层～2层抗侧刚度为 1.8×10^5 kN/m，3层～6层抗侧刚度为 1.0×10^5 kN/m；结构阻尼比为0.05；1层～2层层高为4.8 m，3层～6层层高为4.0 m。场地地震烈度为6度，1类场，依据文献[6]，地震动参数取值为：$\omega_g=15.71$ rad/s，$\xi_g=0.72$；$S_0=11.87\times10^{-4}\,\mathrm{cm^2/s^3}$；$\omega_f=0.15\omega_g$，$\xi_f=\xi_g$。

5.1 本文解法的验证

为了验证本文解法的正确性，分别对地面加速度功率谱和结构位移的0阶、1阶和2阶谱矩开展。

5.1.1 $\ddot{x}$ 的功率谱

由式(2a)和式(2b)得

$$\ddot{x}_g=-2\xi_g\omega_g\dot{u}_g-\omega_g^2u_g+2\xi_f\omega_f\dot{x}_g+\omega_f^2x_g \tag{41}$$

根据式(6a)、式(7)及式(12)，$\dot{u}_g$、u_g、$\dot{x}_g$、x_g 可表示为

$$u_g=u_1z=\sum_{i=1}^{2(n+2)}\lambda_{1,i}\int_0^t\mathrm{e}^{-p_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{42a}$$

$$x_g=u_2z=\sum_{i=1}^{2(n+2)}\lambda_{2,i}\int_0^t\mathrm{e}^{-p_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{42b}$$

$$\dot{u}_g=u_{n+3}z=\sum_{i=1}^{2(n+2)}\lambda_{n+3,i}\int_0^t\mathrm{e}^{-p_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{42c}$$

$$\dot{x}_g=u_{n+4}z=\sum_{i=1}^{2(n+2)}\lambda_{n+4,i}\int_0^t\mathrm{e}^{-p_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{42d}$$

式中，强度系数 $\lambda_{j,i}=u_{j,i}\eta_i$，本算例的强度系数见表1。

将式(42)代入式(41)得

$$\ddot{x}_g=\sum_{i=1}^{2(n+2)}\beta_i\int_0^t\mathrm{e}^{-p_i\tau}\ddot{u}_R(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{43}$$

式中，$\beta_i=-2\xi_f\omega_f\lambda_{n+4,i}-\omega_f^2\lambda_{2,i}+2\xi_g\omega_g\lambda_{n+3,i}+\omega_g^2\lambda_{1,i}$。

根据式(32)，$\ddot{x}_g$ 的单边功率谱密度函数为

$$S_{\ddot{x}_g}(\omega)=4S_0\sum_{i=1}^{2(n+2)}\sum_{k=1}^{2(n+2)}\frac{\beta_i\beta_k}{p_k+p_i}\frac{p_i}{\omega^2+p_i^2} \tag{44}$$

表 1　$\ddot{x}_g$模态强度系数表

Tab. 1　Modal strength coefficient of $\ddot{x}_g$

编号	复特征值	特征值模值/(rad·s⁻¹)	阻尼比	强度系数
1	1.697∓1.635i	2.356 5	0.72	1.700 0∓0.107 0i
2	0.206∓4.124i	4.129 2	0.05	0
3	0.572∓11.431i	11.445 5	0.05	0
4	11.311∓10.902i	15.710 0	0.72	−13.011∓2.453 9i
5	−0.874∓17.461i	17.482 6	0.05	0
6	−1.166∓23.307i	23.336 7	0.05	0
7	−1.395∓27.868i	27.903 8	0.05	0
8	−1.588∓31.731i	31.771 2	0.05	0

由表 1 可知，强度系数一列中仅模态 1 和模态 4 的值≠零，且模态 1 及模态 4 的振动特征值的模值和模态阻尼比与 C-P 谱的振动特征值一致。由式(2)可知，$\ddot{x}_g$仅与滤波的 2 组特征值有关，而与建筑结构的力学参数无关，说明了本文方法的正确性。

图 1 为所提方法的式(44)与式(4)对比图。2 者曲线完全吻合，验证了本文方法的正确性，但本文方法所得功率谱表达式比较简洁。

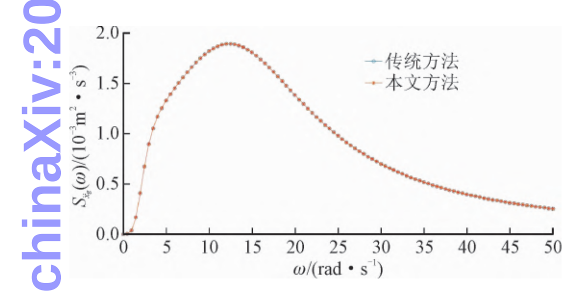


图 1　$S_{\ddot{x}_g}(\omega)$图

Fig. 1　Diagram of $S_{\ddot{x}_g}(\omega)$

5.1.2　结构位移谱矩

为验证所提计算谱矩方法的正确性，可通过式(30)、式(36)对结构各楼层位移的 0～2 阶谱矩进行计算，并与虚拟激励法(PEM)进行比对，如图 2～图 4 所示。由于 PEM 法在计算谱矩时为梯形数值积分法，需给定频域变量 ω 的积分区间和积分步长。本文的积分区间为[0,1 000]，积分步长分 3 种工况：①工况 1，$\Delta\omega=0.8$ rad/s；②工况 2，$\Delta\omega=0.4$ rad/s；③工况 3，$\Delta\omega=0.25$ rad/s。

由图 2～图 4 可知，虚拟激励法计算谱矩随着积分步长 $\Delta\omega$ 的变小，与本文方法越来越接近，说明了本文方法的正确性。此外，本文方法的 CPU 耗时为 0.051 s，虚拟激励法工况 1 的耗时为 1.092 s，工况 2 的耗时为 2.081 s，工况 3 的耗时为 5.180 s。本文方法与工况 3 非常接近，但耗时仅为其 1/100，说明了本文方法的高效性。

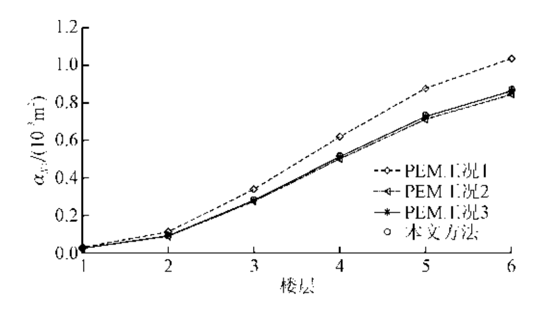


图 2　结构层位移 0 阶谱矩图

Fig. 2　Diagram of 0-order spectral moment of displacement of each layer of structure

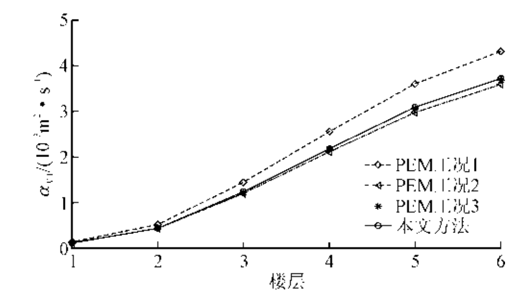


图 3　结构层位移 1 阶谱矩图

Fig. 3　Diagram of 1-order spectral moment of displacement of each layer of structure

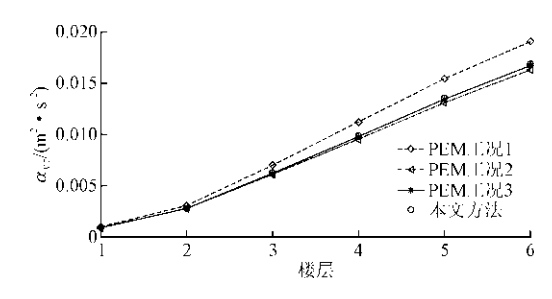


图 4　结构层位移 2 阶谱矩图

Fig. 4　Diagram of 2-order spectral moments of displacement of each layer of structure

5.2　结构体系动力可靠度

依据抗震规范，建筑框架结构在多遇地震下的层间弹性角取值为 1/550，一次地震动持时为 15 s。利用所提方法，分析各楼层层间位移的 0～2 阶谱矩、谱参数及动力可靠度，见表 2。

由表 2 可知，各楼层的结构动力可靠度均较小，按照式(44)计算的结构体系失效概率为 1，说明结构整体失效，需要增加结构抗侧刚度或者设置阻尼器以达到减震的效果。

表 2 可靠度分析表

Tab. 2 Reliability calculation of structure

楼层	0 阶矩/ m^2	1 阶矩/ $(m^2 \cdot s^{-1})$	2 阶矩/ $(m^2 \cdot s^{-2})$	构件可靠度
1 层	2.58×10^{-5}	1.32×10^{-4}	9.32×10^{-4}	6.57×10^{-4}
2 层	2.18×10^{-5}	1.03×10^{-4}	6.39×10^{-4}	8.93×10^{-3}
3 层	5.57×10^{-5}	2.52×10^{-4}	1.41×10^{-3}	4.99×10^{-10}
4 层	4.10×10^{-5}	2.01×10^{-4}	1.24×10^{-3}	2.93×10^{-8}
5 层	2.55×10^{-5}	1.56×10^{-4}	1.26×10^{-3}	3.50×10^{-6}
6 层	9.16×10^{-6}	7.41×10^{-5}	8.21×10^{-4}	1.59×10^{-1}

6 结 论

本文针对 C-P 谱激励下建筑结构响应和动力可靠度分析，提出了新的简化分析方法，结论如下。

1）将 C-P 谱的滤波方程与建筑结构的运动方程联立求解，仅是将复杂的激励模型精确转化为白噪声激励。算例表明，建筑结构的振动特性对于 x_g、x_f 无影响，说明了所提方法仅为一种数学方法，同样适用于其他复杂的非白噪声平稳地震动激励模型下的结构随机地震动响应分析。

2）所提方法所获得的结构地震动响应方差均具有解析解，因此本文方法的计算效率相比传统方法会大大提高；同时，获得了结构响应的 0 ~ 2 阶谱矩的解析表达式，故可用于基于 Markov 分布的可靠度分析，进而提高了可靠度分析的精度。

3）利用 C-P 谱的滤波方程与结构运动方程组成的混合方程为非经典阻尼结构，采用复模态法求解，因此所提方法也适用于复杂的且具有线性滤波器的随机激励下各类线性被动控制结构的响应计算及可靠度分析。

参考文献

[1] HOUSNER G W. Characteristics of strong motion earthquakes[J]. BSSA,1947,37:19-31

[2] KANAI K. An empirical formula for the spectrum of strong earthquake motions[J]. Bulletin of earthquake research institute, University of Tokyo,1961,1(1):86-95.

[3] TAJIMI H. A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake[C]// Proceedings of the 2nd WCEE. Tokyo:[s. n.],1960.

[4] CLOUGH R W, PENZIEN J. Dynamics of structures[M]. New York:Mc Graw Hill,1993.

[5] 胡聿贤，周锡元. 弹性体系在平稳和平稳化地面运动下的反应[M]. 北京：北京科学出版社，1962.（HU Yuxian, ZHOU Xiyuan. Response of elastic system to steady and stable ground motion[M]. Beijing:Beijing Science Press,1962(in Chinese)）.

[6] 欧进萍，牛荻涛，杜修力. 设计用随机地震动的模型及其参数确定[J]. 地震工程与工程振动，1991,3(3):45-54.（OU Jinping, NIU Ditao, DU Xiuli. The model of random ground motion and its parameters are used to determine[J]. Seismic engineering and engineering vibration,1991,3(03):45-54(in Chinese)）.

[7] 李创第，丁晓华，陈俊忠，等. 基础隔震结构基于 Clough-Penzien 谱随机地震响应分析的复模态法[J]. 振动与冲击，2006,12(5):162-165.（LI Chuangdi, DING Xiaohua, CHEN Junzhong, et al. Complex mode method based on Clough-Penzien spectrum random seismic response analysis of base isolated structure[J]. Journal of vibration and shock,2006,12(5):162-165(in Chinese)）.

[8] 杜永峰. 被动与智能隔震结构地震响应分析及控制算法[D]. 大连：大连理工大学，2003.

[9] 李慧，刘迪，杜永峰，等. 基于虚拟激励法的框架-摇摆刚架结构体系的动力可靠度研究[J]. 振动与冲击，2013,32(23):170-174.（LI Hui, LIU Di, DU Yongfeng, et al. Study on dynamic reliability of frame sway frame structure system based on virtual excitation method[J]. Journal of vibration and shock, 2013, 32(23): 170-174(in Chinese)）.

[10] 方同. 工程随机振动[M]. 北京：国防工业出版社，1995.

[11] 林家浩. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京：科学出版社，2004.

[12] 邹万杰，马媛，李创第，等. 带支撑 Maxwell 阻尼器多层隔震结构的随机地震响应分析[J]. 振动与冲击，2017,36(21):213-219.（ZOU Wanjie, MA Yuan, LI Chuangdi, et al. Random seismic response analysis of multi-story isolation structure with support Maxwell damper[J]. Journal of vibration and shock, 2017, 36(21):213-219(in Chinese)）.

[13] 于峥. 多维多点平稳虚拟激励下高墩桥梁碰撞动力可靠度分析[J]. 建筑结构，2018,48(增刊 2):963-967.（YU Zheng. Dynamic reliability analysis of high pier bridge under multi-dimensional and multi-point stationary virtual excitation[J]. Building structure,2018,48(S2):963-967(in Chinese)）.

[14] 林家浩，张亚辉，赵岩. 虚拟激励法在国内外工程界的应用回顾与展望[J]. 应用数学和力学，2017,38(1):1-31.（LIN Jiahao, ZHANG Yahui, ZHAO Yan. Review and prospect of application of pseudo excitation method in engineering field at home and abroad[J]. Applied mathematics and mechanics,2017,38(1):1-31(in Chinese)）.

[15] ZHU S Y, XIANG T Y, LI Y L. An advanced pseudo excitation method and application in analyzing stochastic wind-induced response of slender bridge tower[J]. Advances in structural engineering,2019,22(9):2021-2032.

[16] 郑兆昌. 随机振动矩阵直接谱分析法[C]//第二十三届全国振动与噪声控制学术会议论文集. 北京：中国振动工程学会振动与噪声控制专业委员会，2010.

[17] 李春祥，熊学玉. 基于 Kanai-Tajimi/Clough-Penzien 模型时 MTMD 的动力特性[J]. 振动与冲击，2002,4(4):41-45.（LI Chunxiang, XIONG Xueyu. Dynamic characteristics of MTMD based

on Kanai-Tajimi/Clough-Penzien model[J]. Journal of vibration and shock,2002,4(4):41-45(in Chinese)).

[18] 李创第,柏大炼,邹万杰,等.设置支撑的广义 Maxwell 阻尼器系统基于非平稳巴斯金谱的地震响应分析[J].应用力学学报,2018,35(5):1050-1057.(LI Chuangdi,BAI Dalian,ZOU Wanjie,et al. Seismic response analysis of a supported generalized Maxwell damper system based on nonstationary Baskin spectrum[J]. Chinese journal of applied mechanics,2018,35(5):1050-1057(in Chinese)).

[19] 刘章军,陈建兵.结构动力学[M].北京:中国水利水电出版社,2012.

[20] 孙攀旭,杨红,吴加峰,等.基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法[J].力学学报,2018,50(5):1185-1197.(SUN Panxu,YANG Hong,WU Jiafeng,et al. Complex modal superposition method based on frequency-dependent viscous damping model[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics,2018,50(5):1185-1197(in Chinese)).

[21] 王昌盛.带 TMD 隔震结构动力响应分析的精确实空间解耦法[J].工程抗震与加固改造,2017,39(6):39-43.(WANG Changsheng. Precise real space decoupling method for dynamic response analysis of isolated structure with TMD[J]. Earthquake resistant engineering and retrofitting,2017,39(6):39-43(in Chinese)).

[22] 吕大刚,宋鹏彦,于晓辉,等.结构动力抗震可靠度理论的研究进展[J].西南交通大学学报,2015,50(6):1025-1038.(LÜ Dagang,SONG Pengyan,YU Xiaohui,et al. Research progress of structural dynamic seismic reliability theory[J]. Journal of Southwest Jiaotong University,2015,50(6):1025-1038(in Chinese)).

[23] 刘强,王妙芳.基于首次超越破坏时间概率的结构动力可靠性分析[J].应用力学学报,2019,36(2):480-484.(LIU Qiang,WANG Miaofang. Dynamic reliability analysis of structures based on the probability of first failure time[J]. Chinese journal of applied mechanics,2019,36(2):480-484(in Chinese)).

[24] 曹宏,李桂青,李秋胜.结构动力可靠性理论及其应用[M].北京:地震出版社,1993.

[25] VANMARCKE E H. On the distribution of the first-passage time for normal stationary random processes[J]. Journal of engineering mechanics,1975,42(1):215-220.

[26] 国家标准抗震规范管理组.建筑抗震设计规范:GB 50011—2010[S].北京:中国建筑工业出版社,2016.

[27] 欧进萍,段宇博.高层建筑结构的抗震可靠度分析与优化设计[J].地震工程与工程振动,1995,11(1):1-13.(OU Jinping,DUAN Yubo. Seismic reliability analysis and optimization design of high-rise buildings[J]. Earthquake engineering and engineering dynamics,1995,11(1):1-13(in Chinese)).

[28] 唐巍.地震作用下框架填充墙结构体系可靠度研究[D].长沙:长沙理工大学,2017.

[29] 苏成,徐瑞.非平稳随机激励下结构体系动力可靠度时域解法[J].力学学报,2010,42(3):512-520.(SU Cheng,XU Rui. Time domain method for dynamic reliability of structural system under nonstationary random excitation[J]. Chinese journal of theoretical applied mechanics,2010,42(3):512-520(in Chinese)).

（编辑 张璐）